***Задача 1 .***Решить уравнение в целых числах 407*х* – 2816*y* = 33.

Воспользуемся составленным алгоритмом.

1. Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший общий делитель чисел 407 и 2816:

2816 = 407·6 + 374;

407 = 374·1 + 33;

374 = 33·11 + 11;

33 = 11·3

Следовательно (407,2816) = 11, причем 33 делится на 11

2. Разделим обе части первоначального уравнения на 11, получим уравнение 37*х* – 256*y* = 3, причем (37, 256) = 1

3. С помощью алгоритма Евклида найдем линейное представление числа 1 через числа 37 и 256.

256 = 37·6 + 34;

37 = 34·1 + 3;

34 = 3·11 + 1

Выразим 1 из последнего равенства, затем последовательно поднимаясь по равенствам будем выражать 3; 34 и полученные выражения подставим в выражение для 1.

1 = 34 – 3·11 = 34 – (37 – 34·1) ·11 = 34·12 – 37·11 = (256 – 37·6) ·12 – 37·11 =

– 83·37 – 256·(–12)

Таким образом, 37·(– 83) – 256·(–12) = 1, следовательно пара чисел *х0*= – 83 и *у0* = – 12 есть решение уравнения 37*х* – 256*y* = 3.

4. Запишем общую формулу решений первоначального уравнения

где *t* — любое целое число.

**2.2 Способ перебора вариантов.**

**Задача 2.**В клетке сидят кролики и фазаны, всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других?

**Решение:** Составляется уравнение с двумя неизвестными переменными, в котором х – число кроликов, у – число фазанов:

4х + 2у = 18, или 2х + у = 9.

Выразим ***у***через ***х***: у = 9 – 2х.

Далее воспользуемся методом перебора:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 | 4 |
| у | 7 | 5 | 3 | 1 |

Таким образом, задача имеет четыре решения.

***Ответ:***(1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1).

**2.3 Метод разложения на множители.**

Перебор вариантов при нахождении натуральных решений уравнения с двумя переменными оказывается весьма трудоемким. Кроме того, если уравнение имеет *целые*решения, то перебрать их невозможно, так как таких решений бесконечное множество. Поэтому покажем еще один прием — *метод разложения на множители.*

**Задача 3. Решить уравнение в целых числах *y* 3** **— *x* 3 = 91.**

**Решение.** 1) Используя формулы сокращенного умножения, разложим правую часть уравнения на множители:

(*y* — *x* )(*y* 2 + *xy* + *x* 2 ) = 91……………………….(1)

2) Выпишем все делители числа 91: ± 1; ± 7; ± 13; ± 91

3) Проводим исследование. Заметим, что для любых целых *x* и *y* число

*y* 2 + *yx* + *x* 2 ≥ *y* 2 — 2|*y* ||*x* | + *x* 2 = (|*y* | — |*x* |)2 ≥ 0,

следовательно, оба сомножителя в левой части уравнения должны быть положительными. Тогда уравнение (1) равносильно совокупности систем уравнений:

; ; ;

4) Решив системы, получим: первая система имеет решения (5; 6), (-6; -5); третья (-3; 4),(-4;3); вторая и четвертая решений в целых числах не имеют.

**Ответ:** уравнение (1) имеет четыре решения (5; 6); (-6; -5); (-3; 4); (-4;3).

**Задача 4. Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению**

*.*

**Решение.** Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение в виде

.

Т.к. делителями числа 69 являются числа 1, 3, 23 и 69, то 69 можно получить двумя способами: 69=1·69 и 69=3·23. Учитывая, что , получим две системы уравнений, решив которые мы сможем найти искомые числа:

или .

Первая система имеет решение , а вторая система имеет решение .

**Ответ:** .

**Задача 5. Решить уравнение в целых числах:**

.

**Решение.**Запишем уравнение в виде

.

Разложим левую часть уравнения на множители. Получим

.

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в двух случаях: если оба они равны 1 или -1. Получим две системы:

или .

Первая система имеет решение х=2, у=2, а вторая система имеет решение х=0, у=0.

**Ответ:** .

**Задача 6. Решить в целых числах уравнение**

**.**

**Решение**. Запишем данное уравнение в виде

.

Разложим левую часть уравнения на множители способом группировки, получим

.

Произведение двух целых чисел может равняться 7 в следующих случаях:

7=1· 7=7·1=-1·(-7)=-7·(-1).Таким образом, получим четыре системы:

или , или , или .

Решением первой системы является пара чисел х = — 5, у = — 6. Решая вторую систему, получим х = 13, у = 6.Для третьей системы решением являются числа х = 5, у = 6. Четвёртая система имеет решение х = — 13, у = — 6.

Ответ: .

**Задача 7. Доказать, что уравнение (*x* — *y* )3 + (*y* — *z* )3 + (*z* — *x* )3 = 30 не**

**имеет решений в целых числах.**

**Решение.** 1) Разложим левую часть уравнения на множители и обе части уравнения разделим на 3, в результате получим уравнение:

( *x* — *y* )(*y* — *z* )(*z* — *x* ) = 10…………………………(2)

2) Делителями 10 являются числа ±1, ±2, ±5, ±10. Заметим также, что сумма сомножителей левой части уравнения (2) равна 0. Нетрудно проверить, что сумма любых трех чисел из множества делителей числа 10, дающих в произведении 10, не будет равняться 0. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

**Задача 8. *Решить уравнение: х2 — у2 =3 в целых числах.***

**Решение:**

1. применим формулу сокращенного умножения х2 — у2 =(х-у)(х+у)=3

2. найдем делители числа 3 = -1;-3;1;3

3. Данное уравнение равносильно совокупности 4 систем:

х-у=1 2х=4 х=2, у=1

х+у=3

х-у=3 х=2, у=-1

х+у=1

х-у=-3 х=-2, у=1

х+у=-1

х-у=-1 х=-2, у=-1

х+у=-3

Ответ: (2;1), (2;-1), (-2;1), (-2,-1)

**2.4 Метод остатков.**

**Задача 9 .*Решить уравнение: х2 +ху=10***

***Решение:***

1. Выразим переменную у через х: у= 10-х2

Х

У = — х

2. Дробь будет целой, если х Є ±1;±2; ±5;±10

3. Найдем 8 значений **у.**

Если х=-1, то у= -9 х=-5, то у=3

Х=1, то у=9 х=5, то у=-3

Х=-2, то у=-3 х=-10, то у=9

Х=2, то у=3 х=10, то у=-9

**Задача 10. *Решить уравнение в целых числах:***

***2х2 -2ху +9х+у=2***

**Решение:**

выразим из уравнения то неизвестное, которое входит в него только в первой степени — в данном случае ***у:***

2х2 +9х-2=2ху-у

У =

выделим у дроби целую часть с помощью правила деления многочлена на многочлен «углом». Получим:

Следовательно, разность 2х-1 может принимать только значения -3,-1,1,3.

Осталось перебрать эти четыре случая.

**Ответ**: (1;9), (2;8), (0;2), (-1;3)

***2. Задачи экзаменационного уровня***

***Рассмотрев несколько способов решения уравнений первой степени с двумя переменными в целых числах, мы заметили, что чаще всего применяются метод разложения на множители и метод остатков.***

***Уравнения, которые даны в вариантах ЕГЭ -2011, в основном решаются методом остатков.***

***1. Решить в натуральных числах уравнение: , где т>п***

**Решение:**

Выразим переменную *п*через переменную *т* :

|  |
| --- |
|  |
|  |

Найдем делители числа 625: *т* -25 Є 1; 5; 25; 125; 625

1) если *т* -25 =1, то *т* =26, *п* =25+625=650

2) *т* -25 =5, то *т* =30, *п* =150

3) *т* -25 =25, то *т* =50, *п* =50

4) *т* -25 =125, то *т* =150, *п* =30

5) *т* -25 =625, то *т* =650, *п* =26

**Ответ:***т* =150, *п* =30

*т* =650, *п* =26

***2. Решить уравнение в натуральных числах: тп +25 = 4т***

**Решение**: ***тп +25 = 4т***

1) выразим переменную *т*через *п* :

*4т – тп* =25

*т(4-п) =25*

*т =*

2) найдем натуральные делители числа 25*: ( 4-п)*Є 1; 5; 25

если *4-п* =1, то *п* =3, *т* =25

*4-п* =5, то *п* =-1, *т* =5 (посторонние корни)

*4-п* =25, то *п* =-21, *т* =1 (посторонние корни)

**Ответ:** (25;3)

***3.Найдите все пары ( х; у) целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:***

*х2 +у 2 < 18х – 20у — 166,*

*32х — у2 > х2 + 12у + 271*

Решение: Выделяя полные квадраты, получим:

(х-9)2 + (у+10)2 <15

(х-16)2 + (у+6)2 <21

Из первого и второго неравенства системы :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

(х-9)2 < 15 6≤ х ≤ 12

(х-16)2 < 21, 12≤ х ≤ 20, х=12.

Подставляя х = 12 в систему, получим:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

(у+10)2 < 6 -2 ≤ у+10 ≤ 2 -12 ≤ у ≤ -8

(у+6)2 < 5 -2 ≤ у+6 ≤ 2 -8 ≤ у ≤ -4 у=-8

Ответ: (12; -8)